

**КИНЕМАТИКА СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА  
ПРИ ПНЕВМОТРАНСПОРТИРОВАНИИ**

Викладено співвідношення між швидкостями частинок при зіткненнях у випадку двомір-ного руху. Розглядається випадки зіткнення з взаємним просуванням та без просування час-тинок. Наведено критерії для визначення типу взаємодії між частинками.

**KINEMATIC FOR PARTICLE COLLISIONS OF BULGING MATERIAL  
IN PNEUMOCONVEYING**

Velocity alignment for particle collisions are stated for two- dimensional case. Steal and non- steal cases are considered. Criteria for determination type of collision are stated.

Вопрос о соотношении между скоростями частиц до и после столкновения рассматривался в ряде работ [1-3]. Однако не исследована проблема с учетом вращения и проскальзывания частиц. Целью данной работы является вывод соотношений, которые могут быть использованы для исследования движения ансамбля частиц с взаимными столкновениями.

Пневмотранспортируемый сыпучий материал состоит из частиц различной формы и размера, которые в соответствии критерием Уэдела [4] заменяются набором эквивалентных сферических частиц одинакового радиуса  $a$ . Рассмотрим плоскую задачу столкновения двух вращающихся частиц. Скорости их центров масс: до удара  $\vec{v}_1^{(-)}$  и  $\vec{v}_2^{(-)}$ , после удара  $\vec{v}_1^{(+)}$  и  $\vec{v}_2^{(+)}$ , . Угловые скорости вращения (вокруг центров масс): до удара  $\omega_1^{(-)}$  и  $\omega_2^{(-)}$ , после удара  $\omega_1^{(+)}$  и  $\omega_2^{(+)}$ . Воспользуемся основными уравнениями динамики системы твердых тел при ударе: уравнением сохранения количества движения и уравнением сохранения момента количества движения. Пренебрегаем импульсами всех сил, кроме ударных. Скорости точки контакта, принадлежащие первому и второму шару при ударе с проскальзыванием вообще говоря неодинаковы. Это различие имеет место именно из-за проскальзывания поверхностей в зоне контакта, поскольку неодинаковы проекции скоростей на касательную. Однако нормальные компоненты скоростей в момент времени конца первой фазы одинаковы для обеих тел находящихся в контакте. Запишем уравнение сохранения количества движения в проекции на нормаль к поверхностям шаров в точке контакта.

На основании гипотезы Ньютона записываем соотношения между доударной и послеударной нормальными компонентами импульса [1]

$$S_n^+ = R S_n^- \quad (1)$$

где  $R < 1$  - коэффициент восстановления при ударе.

**1.1. Связь доударных и послеударных скоростей при столкновении частиц с проскальзыванием.** В случае, когда при столкновении частиц происходит удар с проскальзыванием, используется гипотеза сухого трения и зависи-

мость между нормальной  $S_n$  и касательной  $S_\tau$  составляющими полного импульса  $S$  принимается в следующем виде [2, 3]

$$S_{1\tau} = -S_{2\tau} = -f S_n \operatorname{sign} V_{\text{ск}}^C, \quad V_{\text{ск}}^C = V_{C1\tau}^- - V_{C2\tau}^- \quad (2)$$

где  $S_{1\tau}$ ,  $S_{2\tau}$  - касательная составляющая ударного импульса, приложенная к первому и второму телу соответственно,  $V_{\text{ск}}^C = V_{C1\tau}^- - V_{C2\tau}^-$  - скорость взаимного проскальзывания первого тела относительно второго в точке контакта (C) при их столкновении,  $V_{C1\tau}^-$ ,  $V_{C2\tau}^-$  - касательные составляющие скоростей в точке контакта (C) относящихся к телу 1 и 2. В соответствии с формулами кинематики плоского движения они записываются в виде [5]

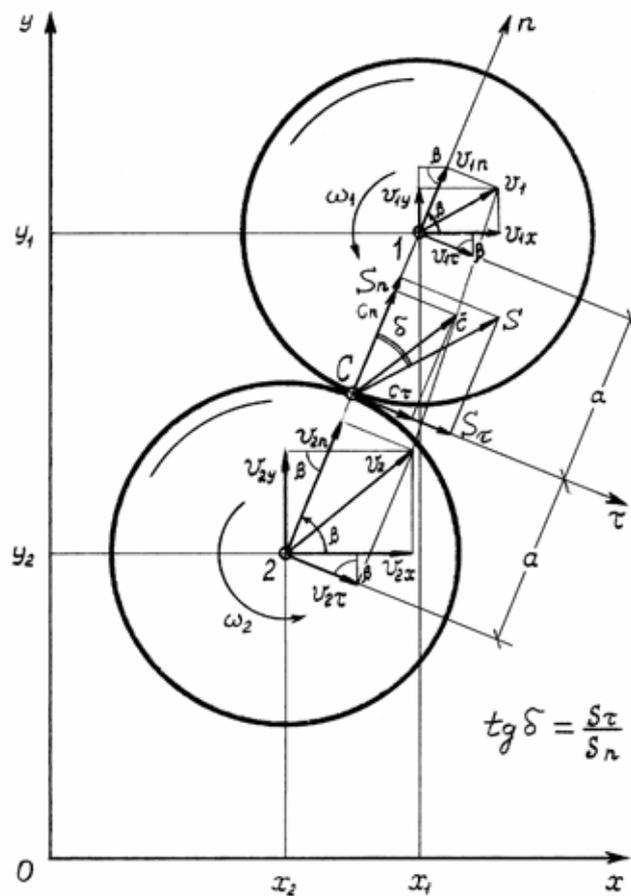


Рис. 1— Схема для расчета соударения двух одинаковых сферических вращающихся частиц; кинематические и силовые факторы в момент их столкновения (плоская задача).

$$V_{Ci\tau}^- = v_{i\tau}^- - (-1)^i a \omega_i^- . \quad (3)$$

Составим уравнение изменения количества движения  $i$ -й частицы в проекции на касательную (ось  $\tau$ )

$$m (v_{i\tau}^+ - v_{i\tau}^-) = S_{i\tau} .$$

Запишем соотношения вращения для каждой отдельной частицы как твердого тела вокруг оси  $z$  на основе закона изменения кинетического момента при действии ударных импульсов [1]

для  $i$ -й частицы

$$J_{C_{1z}}^{(i)} (\omega_i^+ - \omega_i^-) = M_{C_{1z}}^{(i)} (\bar{S}_i) \quad (4)$$

где  $J_{C_{1z}}^{(1)} = J_{C_{2z}}^{(2)} = J_z = m i_z^2$ ;  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_2$ ;  $m, \rho_2$  - масса и плотность

частицы;  $a, J_z, i_z = \sqrt{\frac{2}{5}} a$  - радиус сферической частицы, момент инерции и радиус инерции частицы относительно оси  $z$ , проходящей через ее центр масс нормально к плоскости движения;  $M_{C_{1z}}^{(1)}, M_{C_{2z}}^{(2)}$  - момент ударных сил для первой и второй частицы относительно их центральных осей  $C_{1z}, C_{2z}$ . Если касательная составляющая ударного импульса действующего на первую частицу  $S_{1\tau} > 0$ , то согласно рис. 1 момент ее относительно оси  $C_{1z}$ :  $M_{C_{1z}}^{(1)} (S_{1\tau}) = S_{1\tau} \cdot a > 0$  - вращает против часовой стрелки и положителен.

Нормальная составляющая проходит через центр масс и  $M_{C_{1z}}^{(1)} (S_{1n}) = 0$ . Таким образом уравнение (4) с учетом вышеперечисленных величин записывается в виде

$$m \cdot \frac{2}{5} a^2 (\omega_i^+ - \omega_i^-) = -(-1)^i S_{i\tau} \cdot a. \quad (5)$$

из уравнения (5) получаем

$$\omega_i^+ = \omega_i^- - \frac{5 f_1}{4 a} (1 + R) (v_{2n}^- - v_{1n}^-).$$

Таким образом, получены формулы выражающие послеударные скорости частиц через доударные. Эти формулы называют формулами переключения при соударении частиц с проскальзыванием.

Каждые две формулы для одной координаты но для разных частиц в случае проскальзывания при столкновениях можно записать в виде одной формулы следующим образом

$$v_{ix}^+ = \frac{1}{8a^2} \{ [(1-R)(x_1-x_2)^2 + f_1(1+R)(x_1-x_2)(y_1-y_2) + 2(y_1-y_2)^2] v_{ix}^- + (1+R)[x_1-x_2 - f_1(y_1-y_2)] [(x_1-x_2) v_{(3-i)x}^- + (y_1-y_2)(v_{(3-i)y}^- - v_{iy}^-)] \}; \quad (6)$$

$$v_{iy}^+ = \frac{1}{8a^2} \{ [2(x_1 - x_2)^2 - f_1(1+R)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (1-R)(y_1 - y_2)^2] v_{iy}^- + (1+R)[f_1(x_1 - x_2) + y_1 - y_2] [(y_1 - y_2) v_{(3-i)y}^- + (x_1 - x_2)(v_{(3-i)x}^- - v_{ix}^-)] \},$$

где  $i = 1, 2; f_1 = f \operatorname{sign} \{ a(\omega_1^- + \omega_2^-) + \frac{1}{2a} [(y_1 - y_2)(v_{1x}^- - v_{2x}^-) - (x_1 - x_2)(v_{1y}^- - v_{2y}^-)] \}$ .

Формулы для послеударных угловых скоростей частиц, преобразованные к координатам  $Oxy$ .

$$\omega_i^+ = \omega_i^- - \Delta \omega;$$

где  $\Delta \omega = \frac{5}{8a^2} f_1(1+R) [(x_1 - x_2)(v_{2x}^- - v_{1x}^-) + (y_1 - y_2)(v_{2y}^- - v_{1y}^-)]$ .

**1.2. Связь доударных и послеударных скоростей при столкновении частиц без проскальзывания.** Основные кинематические и динамические уравнения для случая соударения частиц без проскальзывания остаются теми же, что и при проскальзывании. Кроме тех соотношений, которые описывают состояние в точке контакта по направлению касательной к поверхностям. В случае с проскальзыванием таким соотношением является зависимость касательной компоненты ударного импульса от нормальной по условиям сухого трения, а для столкновения двух частиц без проскальзывания это будет равенство нулю скорости проскальзывания после удара.

Запишем основные динамические и кинематические соотношения при столкновении частиц без проскальзывания. Принимаем направление касательной составляющей ударного импульса, действующего на каждую частицу, таким же, как для случая столкновения с проскальзыванием. Положительное направление оси  $S_\tau$  считаем слева направо. Из формулы (22) вытекает, что при положительной скорости скольжения тел в точке  $C$  ( $V_{ск}^C > 0$ ) касательная составляющая импульса, действующего на первую частицу будет отрицательна а на вторую- положительна

$$S_{1\tau} = -S_\tau, \quad S_{2\tau} = S_\tau,$$

где  $S_\tau = |S_{1\tau}| = |S_{2\tau}|$ .

Уравнения количества движения в проекции на касательную  $S_\tau$  для первой и второй частицы с учетом (9) записывается в виде

$$m(v_{i\tau}^+ - v_{i\tau}^-) = (-1)^i S_\tau;$$

Учитывая, что

$$S_{1n} = -S_{2n} = |S_{1n}|,$$

записываем уравнение количества движения для первой части в проекции на нормаль  $S_n$

$$m (v_{1n}^+ - v_{1n}^-) = S_n.$$

Аналогично находим для второй частицы

$$m (v_{2n}^+ - v_{2n}^-) = -S_n.$$

Принимая во внимание знаки  $S_{1\tau}$ ,  $S_{2\tau}$  и учитывая, что положительный момент вращает против часовой стрелки, записываем уравнения вращения частиц (32), (33) в виде

$$J (\omega_i^+ - \omega_i^-) = -S_\tau \cdot a;$$

где  $J = J_z = \frac{2}{5} ma^2$ ;  $m$ ,  $a$  - момент инерции, масса и радиус сферической частицы.

Получим соотношение, учитывающее физические свойства контакта в направлении нормали при соударении двух частиц. Исключая из выражений величину  $c_n$ , записываем

$$v_{2n}^+ - v_{1n}^+ = -R (v_{2n}^- - v_{1n}^-), \quad (7)$$

где  $R$  - коэффициент восстановления. Формула (7) связывает относительные нормальные скорости частиц до и после удара.

Получим формулу, учитывающую кинематику контакта в касательном направлении. При соударении без проскальзывания скорость скольжения первой частицы относительно второй после удара равна нулю

$$V_{\text{ск}}^C = 0. \quad (8)$$

Подставляя в (8) формулу (2) для послеударного состояния, записываем

$$V_{\text{ск}}^C = V_{c1\tau}^+ - V_{c2\tau}^+ = 0. \quad (9)$$

Используя в соотношении (9) выражения (3) для послеударного состояния, получаем

$$v_{2\tau}^+ - v_{1\tau}^+ = a (\omega_1^+ + \omega_2^-).$$

Это уравнение является замыкающим для системы из восьми уравнений, содержащих восемь неизвестных:  $v_{1\tau}^+$ ,  $v_{1n}^+$ ,  $v_{2\tau}^+$ ,  $v_{2n}^+$ ,  $\omega_1^+$ ,  $\omega_2^+$ ,  $S_n$ ,  $S_\tau$ . Займемся решением этой системы уравнений.

При этом учитываем, что для сплошной сферической частицы  $J = 2 ma^2 / 5$ .

$$\begin{aligned}
v_{ix}^+ &= \frac{1}{8a^2} \left\{ \left[ \frac{12}{7} (y_1 - y_2)^2 + (1 - R) (x_1 - x_2)^2 \right] v_{ix}^- + \left[ \frac{2}{7} (y_1 - y_2)^2 + (1 + R) (x_1 - x_2)^2 \right] v_{3-i,x}^- + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{5}{7} + R \right) (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) (-v_{iy}^- + v_{3-i,y}^-) + \frac{4}{7} a^2 (y_{3-i} - y_i) (\omega_1^- + \omega_2^-) \right\}; \quad (10) \\
v_{iy}^+ &= \frac{1}{8a^2} \left\{ \left[ \frac{12}{7} (x_1 - x_2)^2 + (1 - R) (y_1 - y_2)^2 \right] v_{iy}^- + \left[ \frac{2}{7} (x_1 - x_2)^2 + (1 + R) (y_1 - y_2)^2 \right] v_{3-i,y}^- + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{5}{7} + R \right) (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) (-v_i^- + v_{3-i,x}^-) + \frac{4}{7} a^2 (x - x_{3-i}) (\omega_1^- + \omega_2^-) \right\}; \\
\omega_i^+ &= \frac{5}{28a^2} [(y_1 - y_2)(-v_{1x}^- + v_{2x}^-) + (x_1 - x_2)(v_{1y}^- - v_{2y}^-)] + 2 a^2 \left( \frac{9}{5} \omega_i^- - \omega_{3-i}^- \right); \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

где  $i$  - номер частицы.

Подводя итоги п.1 укажем, что получены формулы, связывающие в прямоугольных неподвижных координатах послеударные скорости сферических вращающихся частиц с доударными скоростями для случаев столкновения с проскальзыванием и без проскальзывания. Далее у доударных скоростей верхний индекс минус ( - ) опускается, а индекс плюс ( + ) у послеударных скоростей заменяется на ноль (0), что является показателем начальной скорости для частицы после столкновения. Кроме того, поскольку в общем случае рассматривается движение  $n$  частиц, а не двух, то индексы «1» и «2» заменяются на « $i$ » и « $j$ » соответственно так, что  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ; при этом  $i \neq j$ . Таким образом формулы для послеударных скоростей в функции от доударных, называемые также формулами переключения, принимают следующий вид.

Для соударения  $i$ -ой и  $j$ -ой частицы при проскальзывании:

$$\begin{aligned}
v_{ix}^0 &= \left\{ \left[ (1 - R) \Delta x^2 / 2 + \Delta y^2 + (1 + R) f_1 \Delta x \Delta y / 2 \right] v_{ix}^- + \right. \\
&\quad \left. + (1 + R) (\Delta x - f_1 \Delta y) (\Delta x v_{jx}^- - \Delta y \Delta v_y^-) / 2 \right\} / 4 a^2; \quad (11) \\
v_{iy}^0 &= \left\{ \left[ (1 - R) \Delta y^2 / 2 + \Delta x^2 - (1 + R) f_1 \Delta x \Delta y / 2 \right] v_{iy}^- + \right. \\
&\quad \left. + (1 + R) (\Delta y + f_1 \Delta x) (\Delta y v_{jy}^- - \Delta x \Delta v_x^-) / 2 \right\} / 4 a^2; \\
\omega_i^0 &= \omega_i^- + \Delta \omega; \quad \omega_j^0 = \omega_j^- + \Delta \omega, \quad \text{где } \Delta \omega = 5 f_1 (1 + R) (\Delta x \Delta v_x^- + \Delta y \Delta v_y^-) / 8 a^2; \\
\Delta x &= x_i^- - x_j^-; \quad \Delta y = y_i^- - y_j^-; \quad \Delta v_x = v_{ix}^- - v_{jx}^-; \quad \Delta v_y = v_{iy}^- - v_{jy}^-; \\
f_1 &= f \operatorname{sign} [(\omega_i^- + \omega_j^-) a + v_{ix}^- - v_{jx}^-]; \quad v_{ix}^- - v_{jx}^- = (-\Delta x \Delta v_y^- + \Delta y \Delta v_x^-) / 2 a
\end{aligned}$$

и для соударения  $i$ -ой и  $j$ -ой частицы без проскальзывания:

$$\begin{aligned}
v_{ix}^0 &= \left\{ \left[ 6 \Delta y^2 / 7 + (1 - R) \Delta x^2 / 2 \right] v_{ix}^- + \left[ \Delta y^2 / 7 + (1 + R) \Delta x^2 / 2 \right] v_{jx}^- - \right. \\
&\quad \left. - (5 / 7 + R) \Delta x \Delta y \Delta v_y^- / 2 - 2 a^2 \Delta y (\omega_i^- + \omega_j^-) / 7 \right\} / 4 a^2; \quad (12) \\
v_{iy}^0 &= \left\{ \left[ (6 \Delta x^2 / 7 + (1 - R) \Delta y^2 / 2) v_{iy}^- + \left[ \Delta x^2 / 7 + (1 + R) \Delta y^2 / 2 \right] v_{jy}^- - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (5 / 7 + R) \Delta x \Delta y \Delta v_x^- / 2 + 2 a^2 \Delta x (\omega_i^- + \omega_j^-) / 7 \right\} / 4 a^2; \\
\omega_i^0 &= 5 \left[ -\Delta y \Delta v_x^- + \Delta x \Delta v_y^- + 2 a^2 (9 \omega_i^- / 5 - \omega_j^-) \right] / 28 a^2; \\
\omega_j^0 &= 5 \left[ -\Delta y \Delta v_x^- + \Delta x \Delta v_y^- + 2 a^2 (9 \omega_j^- / 5 - \omega_i^-) \right] / 28 a^2,
\end{aligned}$$

где  $i, j, = 1, 2, \dots, n$  ( $i \neq j$ );  $n$  - число частиц.

При столкновении частицы с нижней или верхней стенкой, когда выполняется условие

$$y = a, \quad y = H - a$$

происходит мгновенное изменение составляющих линейной и угловой скорости частицы. Составляющие мгновенной скорости центра масс до удара обозначим индексом « - », а после удара индексом « + ». Составляющая скорости частицы, нормальная к стенке определяется по закону

$$v_y^+ = - R v_y^-, \quad (13)$$

где  $R$  – коэффициент восстановления нормальной компоненты скорости при ударе.

По теореме об изменении количества движения при ударе для компонент вдоль оси  $Oy$  определяем импульс, действующий вдоль оси  $Oy$

$$S_y = - m (1 + R) v_y^-.$$

Для определения  $v_y^+$  и  $\omega^+$  рассматриваем частицу как шар радиуса  $a$ , ударяющийся о стенку. Используя теорему об изменении количества движения для компонент вдоль оси  $Ox$  и теорему об изменении момента количества движения относительно центра масс (точки  $C$ ) при учете импульсов только ударных сил записываем

$$v_x^+ - v_x^- = \frac{S_x}{m}, \quad \omega^+ - \omega^- = \frac{aS_x}{J_z^{(C)}} \text{sign } v_y^-, \quad (14)$$

где  $J_z^{(C)} = 0,4 ma^2$  - момент инерции шара относительно оси  $Cz$ , проходящей через его центр,  $S_x$  - величина касательного ударного импульса в точке контакта шара с нижней или верхней стенкой. Знак момента импульса в точке контакта и положение точки контакта на шаре определяется значением  $\text{sign } v_y^-$ :  $\text{sign } v_y^- < 0$  соответствует нижней точке,  $\text{sign } v_y^- > 0$  – верхней.

При столкновении частицы со стенкой без проскальзывания касательная мгновенной скорости в точке контакта на частице перед ударом

$$V_x^- = v_x^- - a\omega^- \text{sign } v_y^- \neq 0$$

после удара обращается в нуль

$$V_x^+ = v_x^+ - a\omega^+ \operatorname{sign} v_y^- = 0.$$

Из (14) с учетом  $V_x^+ = 0$  получаем

$$\omega^+ = (\omega^- + 2,5 v_x^- \operatorname{sign} v_y^- / a) / 3, \quad v_x^+ = a\omega^+ \operatorname{sign} v_y^-, \quad S_x = m(a\omega^- \operatorname{sign} v_y^- - v_x^-) / 3,5 \quad (15)$$

Соотношения (14), (15) определяют скорости частиц при ударе без проскальзывания.

При столкновении частицы со стенкой с проскальзыванием предполагаем, что касательный импульс со стороны стенки связан с нормальным импульсом законом Кулона

$$S_x = -f |S_y| \operatorname{sign} V_x^-$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения скольжения частицы о стенку.

Импульс  $S_x$  имеет величину

$$S_x = -fm(1+R) |v_y^-| \operatorname{sign} V_x^-.$$

Определяем скорость центра масс и угловую скорость

$$v_x^+ = v_x^- - \Delta v; \quad \omega^+ = \omega^- + 2,5 \Delta v / a \Delta v = f(1+R) v_x^- \operatorname{sign} (v_x^- - a\omega^- \operatorname{sign} v_y^-).$$

В соответствии с законом Кулона для сухого трения при отсутствии проскальзывания сила (или импульс), действующая на частицу со стороны стенки расположена внутри конуса трения. При этом условие непроскальзывания записывается в виде

$$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{S_x}{S_y} \right| \leq f = \operatorname{tg} \rho_f$$

где  $\rho_f$  – угол трения.

Это даёт критерий существования удара без проскальзывания

$$\left| \frac{\omega^- - v_x^- \operatorname{sign} v_y^-}{(1+R)v_y^-} \right| < 3,5f.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. Динамика. – М. : Высш. шк. – 1966. – 411 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М. : Стройиздат, 1965. – 465 с.

3. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. – М.: Наука, 1985. – 200 с. с.
4. Рыжков Ю.А., Волков А.И., Гоголин В.А. Механика и технология формирования закладочных массивов. – М.: Недра, 1985. – 191 с
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т. 2. – 640 с.

**УДК 622.267.53**

С.С. Гребенкин, А.Д. Доронин,  
Ю.А. Пивень, С.Е. Топчий

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ОСНОВНЫХ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ  
НА СРЕДНИЕ ТЕМПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫРАБОТОК  
ПО ВЫБРОСООПАСНЫМ ПЛАСТАМ.**

У статті наведено наслідки аналітичних досліджень, що їх пов'язано із оцінкою ув'язки у часі та просторі технологічних процесів проведення виробок разом з засобами по боротьбі із раптовими викидами вугілля та газу. Матеріал статті базується на найбільш ефективним та поширеним на шахтах Донбасу способу боротьби із раптовими викидами – нагнітання води у пласт в режимі гідрорихлення.

**THE ANALYSIS OF BASIC MINE TECHNICAL FACTORS INFLUENCE  
ON AVERAGE RATES OF TUNNELS REALIZATION ON EMISSION  
DANGEROUS LAYERS.**

In clause the results of analytical researches connected to estimation of coordination in time and space of technological processes of tunnels realization with ways on struggle with sudden emissions coal and gas are given. The material of clause is based on most effective and widespread on mines of Donbass a way of struggle with sudden emissions - water forcing in layer in mode of hydroloosening

При проведении подготовительных выработок по выбросоопасным пластам зачастую очень трудно заранее предусмотреть такую расстановку рабочих, которая обеспечила бы на протяжении всего планируемого месяца постоянный фронт работ и исключила бы простои забоя [1]. В период проведения мероприятий по предупреждению внезапных выбросов угля и газа не всегда вовремя удается обеспечить бригаду, работающую в данном забое, фронтом работ. В особенности это затруднено при работе укрупненной бригады и использовании проходческих комбайнов, так как при этом увеличивается скорость подвигания забоя и частота перестановок бригады из-за необходимости выполнения специальных мероприятий.

В этой связи вопрос увязки во времени и пространстве технологических процессов по проведению выработки с мероприятиями по предупреждению внезапных выбросов [2] угля и газа в конкретных горнотехнических условиях имеет большое практическое значение.

Ниже приведены результаты аналитических исследований влияния основных факторов на темпы проведения выработок с осуществлением наиболее эффективного и распространенного на шахтах Донбасса способа предупреждения внезапных выбросов угля и газа – нагнетания воды в пласт в режиме гидрорыхления.